ÇEVAP ANAHTARI

Adı-Soyadı: **08.06.2018**

Numarası:

Fen – Edb. Fak. Mat. Bölümü Diferansiyel Geometri II Bütünleme Sınav Soruları

1. Parametrik ifadesi ,

$$x_1 = 6t$$
$$x_2 = 3t^2$$
$$x_3 = t^3$$

olan eğrinin helis olduğunu gösteriniz ve bu helisin sabit açı yaptığı u doğrultusunu bulunuz.

2. M, 3-boyutlu uzayda r yarıçaplı bir küre olsun. M yüzeyinin Gauss dönüşümü altındaki resmi olan $\eta(M)$ kümesini bulunuz.

3. 3-boyutlu uzayda düzlemler flat yüzeylerdir, gösteriniz.

4. M, E^n de bir hiperyüzey olsun. M nin S şekil operatörü self-adjoint (simetrik) bir dönüşümdür, ispatlayınız.

5. M, E^n de hiperyüzey ve M nin bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P), k_2(P), \ldots, k_{n-1}(P)$ olsun. Bu takdirde

$$H(P) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} k_i(P)$$

dır, ispatlayınız.

6. E^n deki bir M hiperyüzeyinin H ortalama eğriliği baz seçiminden bağımsızdır, ispatlayınız.

7. Kovaryant ve kontravaryant tensör tanımlarını yapınız ve birer örnek veriniz.

NOT: 3.soru 20 puan, 6. ve 7. sorular 10 puan diğerleri 15 puan.

Başarılar

Prof. Dr. Emin KASAP

1) α eğrisinin bir helis belirtmesi için

$$\frac{k_1}{k_2} = \tan\theta = \text{sabit}$$

olduğu gösterilmelidir. Ayrıca verilen α eğrisi birim hızlı bir eğri olmadığı için eğrilik formülleri

$$k_1 = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad \text{ve} \quad k_2 = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

dır.

$\alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ olmak üzere

$\alpha'(t) = (6, 6t, 3t^2)$

$\alpha''(t) = (0, 6, 6t)$

$\alpha'''(t) = (0, 0, 6)$ bulunur. Buradan

- $\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 6 & 6t & 3t^2 \\ 0 & 6 & 6t \end{vmatrix} = (18t^2, -36t, 36) \Rightarrow \|\alpha' \times \alpha''\| = 18(t^2+2)$

- $\|\alpha'\|^3 = [3(t^2+2)]^3$

- $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \begin{vmatrix} 6 & 6t & 3t^2 \\ 0 & 6 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 216$ elde edilir. O halde

$$k_1 = \frac{18(t^2+2)}{27(t^2+2)^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(t^2+2)^2} \quad \text{ve} \quad k_2 = \frac{216}{18^2(t^2+2)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(t^2+2)^2} \text{ dır}$$

$\Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ olur. Bu ise $\alpha(t)$ nin helis olduğunu gösterir. Son olarak $\vec{u} = \cos\theta\, T + \sin\theta\, B$ olmasından

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(T+B)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} + \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{t^2+2}(2, 2t, t^2) + \frac{1}{t^2+2}(t^2, -2t, 2)\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ elde edilir.}$$

2) $M = \{ (x,y,z) \in E^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2 \}$ yüzeyinin birim normal vektör alanı için:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2 = 0 \text{ olmak üzere:}$$

$$\vec{\nabla} f = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow \|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2r \text{ olup}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \frac{1}{r}(x,y,z) \text{ bulunur. O halde}$$

Gauss dönüşümü

$$\tau : M \longrightarrow S^2 \subset E^3$$

$$P = (P_1, P_2, P_3) \longrightarrow \tau(P) = \vec{N}_P = \frac{1}{r}(x,y,z)|_P$$

$$= \frac{1}{r}(x(P), y(P), z(P))$$

$$= \frac{1}{r}(P_1, P_2, P_3) \text{ seklinde bulunur.}$$

Ayrıca, $P \in M$ olduğundan $P_1^2+P_2^2+P_3^2 = r^2$ dır. Sonuç olarak;

$$\tau(M) = \{ \tau(P) \in S^2 \mid P \in M \}$$

$$= \{ \underline{\tfrac{1}{r}(P_1, P_2, P_3)} \mid P \in M \} \text{ elde edilir.}$$

$$\frac{P_1}{r} = x \Rightarrow \frac{P_1^2}{r^2} = x^2$$

$$\frac{P_2}{r} = y \Rightarrow \frac{P_2^2}{r^2} = y^2 \quad \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ olup}$$

$$\frac{P_3}{r} = z \Rightarrow \frac{P_3^2}{r^2} = z^2$$

M yüzeyinin τ Gauss dönüşümü altındaki resminin orjin merkezli birim kürenin tamamı olduğu görülür.

3) 3 - boyutlu uzayda düzlemler flat yüzeylerdir, gösteriniz?

$$M = \{ (x,y,z) \in E^3 \mid ax + by + cz + d = 0 \} \subset E^3$$

düzlemi için:

$$\phi : U \subset E^2 \to E^3$$
$$(u,v) \to \phi(u,v) = \left(u,\ v,\ \frac{-d-au-bv}{c} \right)$$

parametrelendirilmesi yapılabilir.

$$\phi_u = \left(1,\ 0,\ -\frac{a}{c}\right) \Rightarrow \|\phi_u\| = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}$$

$$\phi_v = \left(0,\ 1,\ -\frac{b}{c}\right) \Rightarrow \|\phi_v\| = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{c}$$ olmak üzere

$\chi(M)$ kümesinin bir bazı

$$\left\{ V_1 = \frac{\phi_u}{\|\phi_u\|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(1, 0, -\frac{a}{c}\right),\ V_2 = \frac{\phi_v}{\|\phi_v\|} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\left(0, 1, -\frac{b}{c}\right) \right\}$$

dır. Ayrıca M nin birim normal vektör alanı N için;

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \end{vmatrix} = \left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ 1\right)$$

ve

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}$$

$$\Rightarrow N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c)$$ bulunur.

$S : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris :

$$S(v_1) = a v_1 + b v_2$$
$$S(v_2) = c v_1 + d v_2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ dır. Burada}$$

* $S(v_1) = S\left(\frac{\phi_u}{\|\phi_u\|}\right) = \frac{1}{\|\phi_u\|} S(\phi_u) = \frac{1}{\|\phi_u\|} D_{\phi_u} N = \frac{1}{\|\phi_u\|} N_u$

$$\left[\Rightarrow S(v_1) = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} (0,0,0) = (0,0,0) \text{ dır.} \right]$$

* $S(v_2) = S\left(\frac{\phi_v}{\|\phi_v\|}\right) = \frac{1}{\|\phi_v\|} S(\phi_v) = \frac{1}{\|\phi_v\|} D_{\phi_v} N = \frac{1}{\|\phi_v\|} N_v$

$$\left[\Rightarrow S(v_2) = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} (0,0,0) = (0,0,0) \text{ dır} \right]$$

Şimdi a, b, c, d katsayılarını belirleyelim:

$a = \langle S(v_1), v_1 \rangle \Rightarrow a = 0$

$b = \langle S(v_1), v_2 \rangle \Rightarrow b = 0$

$c = \langle S(v_2), v_1 \rangle \Rightarrow c = 0$

$d = \langle S(v_2), v_2 \rangle \Rightarrow d = 0$ dır ki $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

Bir yüzeyin flat olması gauss eğriliğin her yerde sıfır olmasıdır. O halde

$\forall P \in M$ için

$K(P) = \det S_p = 0$ dır. Sonuç olarak 3-boyutlu uzayda düzlemler flat yüzeylerdir.

4) Self-adjoint dönüşüm, reel anlamda transpozu kendisine eşit olan yani simetrik dönüşümdür. O halde, her $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için

$$\langle S(X), Y \rangle = \langle X, S(Y) \rangle$$ olduğunu göstermeliyiz.

$X \in \mathcal{X}(M)$ için $\langle X, N \rangle = 0$ yazılır. Buradan,

$$Y[\langle X, N \rangle] = Y[0]$$

$$\Rightarrow \langle D_Y X, N \rangle + \langle X, D_Y N \rangle = 0 \quad (1)$$ elde edilir.

$Y \in \mathcal{X}(M)$ için $\langle Y, N \rangle = 0$ yazılır. Buradan,

$$X[\langle Y, N \rangle] = X[0]$$

$$\Rightarrow \langle D_X Y, N \rangle + \langle Y, D_X N \rangle = 0 \quad (2)$$ elde edilir.

(1) ve (2) eşitliklerinden

$$\langle D_X Y, N \rangle + \langle Y, D_X N \rangle - \langle D_Y X, N \rangle - \langle X, D_Y N \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle D_X Y - D_Y X, N \rangle + \langle Y, S(X) \rangle - \langle X, S(Y) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle [X, Y], N \rangle + \langle Y, S(X) \rangle - \langle X, S(Y) \rangle = 0$$ bulunur. Bu eşitlikte $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$ ve $N \in \mathcal{X}^{\perp}(M)$ olduğundan

$$\langle S(X), Y \rangle = \langle X, S(Y) \rangle$$ eşitliği elde edilir.

5) $k_1(P), \ldots, k_{n-1}(P)$ asli eğriliklerine karşılık gelen asli doğrultular, sırasıyla, $X_1, \ldots, X_{n-1}$ olsun. Şekil operatörü simetrik olduğundan; asli doğrultu vektörlerinden oluşan $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ ortonormal sistem vardır. boy M = boy $T_M(P) = n-1$ olduğundan $\phi = \{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ sistem $T_M(P)$ nin bir ortonormal bazıdır. Buradan,

$$S(X_1) = k_1 X_1 = k_1 X_1 + 0 X_2 + \cdots + 0 X_{n-1}$$

$$S(X_2) = k_2 X_2 = 0 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + 0 X_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$S(X_{n-1}) = k_{n-1} X_{n-1} = 0 X_1 + 0 X_2 + \cdots + k_{n-1} X_{n-1}$$ yazılır.

S lineer bir dönüşüm olduğundan bu dönüşüme karşılık gelen matris (ϕ bazına göre)

$$S_\phi = \begin{bmatrix} k_1(P) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2(P) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1}(P) \end{bmatrix}$$ olur. H ortalama

eğrilik tanımı gereğince

$$H(P) = \frac{1}{n-1} \, \text{iz}\, S(P)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} k_i(P)$$ olduğu görülür.

6) $T_M(P)$ deki farklı iki baz ϕ ve ψ olsun. Bu bazlara göre, S'ye karşılık gelen matrisler, sırasıyla S_ϕ ve S_ψ olsun. O halde,

$S_\psi = Q S_\phi Q^{-1}$ olacak şekilde bir tek regüler Q matrisi vardır. H ortalama eğrilik tanımı gereğince,

$$\text{iz}\, S_\psi = \text{iz}\,(Q S_\phi Q^{-1})$$
$$= \text{iz}\,(Q Q^{-1} S_\phi)$$
$$= \text{iz}\,(I S_\phi)$$
$$= \text{iz}\, S_\phi$$ bulunur. Bu ise ortalama eğriliğin baz seçiminden bağımsızdır.

7) <u>Kovaryant Tensör:</u> $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye bütün r-lineer fonksiyonların kümesi

$$\mathcal{L}\,(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R})$$

ile gösterilsin. Bu küme, üzerinde tanımlanan iki işleme göre bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Bu vektör uzayına tensör uzayı ve onun herbir elemanına r. dereceden tensör adı verilir. Eğer

$V = V_1 = V_2 = \dots = V_r$ ise o zaman bu uzaya kovaryant tensör uzayı, her bir elemanına da r. dereceden kovaryant tensör adı verilir. Kısaca $T^r(V)$ ile gösterilir.

ÖRNEK: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı determinant fonksiyonu n-lineer olduğundan n. dereceden kovaryant tensördür

<u>Kontravaryant Tensör</u>: Kovaryant tensörler için yukarıda verilen tanımda V yerine onun duali olan V^* alınırsa bu uzaya kontravaryant tensör uzayı denir. Bu uzayın herbir elemanınada r. dereceden kontravaryant tensör adı verilir. Kısaca $T_r(V^*)$ ile gösterilir.

ÖRNEK: V vektör uzayının elemanları 1. dereceden kontravaryant tensördür

$$T_1(V^*) = V = \left\{ f \mid f : V^* \xrightarrow{\text{lin.}} \mathbb{R} \right\}$$